Über die starke Summation von Fourierreihen.

Von KÁROLY TANDORI in Szeged.

§. 1. Einleitung.

Die Fourierreihe

$$\mathfrak{S}(f) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

der Funktion $f(x) \in L[0, 2\pi]$ nennen wir stark summierbar in r-ter Ordnung, oder einfacher H_r-summierbar im Punkte x_0, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} |s_\nu(f; x_0) - f(x_0)|^r = 0$$

ist, wo $s_\nu(f; x)$ die ν-te Teilsumme von $\mathfrak{S}(f)$ bezeichnet.

G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD[1]) haben bewiesen, daß für $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$ $\mathfrak{S}(f)$ in jedem Lebesgueschen Punkte p-ter Ordnung von $f(x)$ stark summierbar in beliebiger positiver Ordnung r ist. Im Falle $p = 1$ war die Gültigkeit dieses Satzes zweifelhaft gewesen, bis G. H. HARDY und J. E. LITLLEWOOD[2]) ein Beispiel einer integrierbaren Funktion gaben, die im Punkte $x = 0$ einen Lebesgueschen Punkt besitzt, aber deren Fourierreihe hier nicht H_1-summierbar ist; zugleich warfen sie das Problem auf, ob die Fourierreihe einer beliebigen integrierbaren Fnnktion in einer gewissen Ordnung fast überall stark summierbar sei. J. MARCINKIEWICZ[3]) hat diese Frage bejahend beantwortet; er hat gezeigt, daß die Fourierreihe einer beliebigen Funktion $f(x) \in L[0, 2\pi]$ fast überall H_2-summierbar ist. Später hat A. ZYGMUND[4]) bewiesen, daß die Fourierreihe sogar in beliebiger positiver Ordnung r H_r-summierbar ist.

---

[1]) G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD, Note on the theory of series (IV.), On the strong summability of Fourier series, *Proceedings of the London Math. Society,* **26** (1927), 273—286.

[2]) G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, The strong summability of Fourier series, *Fundamenta Math.,* **25** (1935), 162—189.

[3]) J. MARCINKIEWICZ, Sur la sommabilité forte de séries de Fourier, *Journal of the London Math. Society,* **14** (1939), 162—168.

[4]) A. ZYGMUND, On the convergence and summability of power series on the circle of convergence (II), *Proceedings of the London Math. Society,* **47** (1942), 326—350.

Da die Fourierreihe einer integrierbaren Funktion nach dem erwähnten Beispiel von G. H. HARDY und J. E. LITTLEWOOD in einem Lebesgueschen Punkte nicht notwendigerweise H_1-summierbar, ja auch nicht H_2-summierbar sein braucht, kann man die Frage stellen, ob man eine einfache analytische Bedingung für die Funktion angeben kann, die fast überall erfüllt ist, und aus derem Erfülltsein in einem Punkte x_0 die H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe der Funktion im Punkte x_0 folgt. Mit dieser Frage befassen wir uns in der vorliegenden Arbeit. Auf analoger Weise kann man auch die Frage der H_{2m}-Summierbarkeit (m positiv, ganz) behandeln, um einfacheres Rechnen willen beschränken wir uns jedoch auf den Fall der H_2-Summation.

§ 2. Sätze über integrierbare Funktionen.

Satz I. *Ist $f(t)$ nach 1 periodisch und $f(t) \in L[0,1]$, so ist in fast allen Punkten des Intervalls $[0,1]$, gleichmäßig in k (>0)*

$$(1) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3+hk} \int_{-h}^{h} |f(x+u)-f(x)|\,du \int_{u-k}^{u+k} |f(x+v)-f(x)|\,dv = 0 \quad (h>0).$$

Zum Beweis haben wir die folgenden zwei Lemmas von J. MARCINKIEWICZ[5]) nötig:

Lemma I. *Ist die Funktion $f^*(t) \in L[0,1]$ auf einer meßbaren Menge E ($\subseteq [0,1]$) gleich 0, so gibt es für jedes positive η eine perfekte Menge $F \subseteq E$ und eine positive Zahl M, so daß*

$$\operatorname{mes} F \geqq \operatorname{mes} E - \eta,$$

$$\int_{-k}^{k} |f^*(x+v)|\,dv \leqq Mk \qquad (x \in F)$$

und

$$\int_{I_\nu} |f^*(v)|\,dv \leqq M \operatorname{mes} I_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

gelten, wobei die I_ν die Komplementär-Intervalle von F in $(0,1)$ bezeichnen.

Lemma II. *Sei $F \subseteq [0,1]$ eine perfekte Menge, und seien I_ν ($\nu = 1,2,\ldots$) die Komplementär-Intervalle von F in $[0,1]$. Wenn die nicht-negative, nach 1 periodische Funktion $\Phi(t)$ auf der Menge F gleich 0 ist, und $\Phi(t) = \operatorname{mes} I_\nu$ für $t \in I_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) ist, dann besteht in fast allen Punkten x des Intervalls $[0,1]$*

$$\int_0^1 \frac{\Phi(x+t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

[5]) Siehe z. B. l. c.[3]).

Beweis von Satz I. Ausführlich werden wir nur das Bestehen der Relation

$$(2)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^3+hk}\int_0^h |f(x+u)-f(x)|\,du\int_u^{u+k}|f(x+v)-f(x)|\,dv=0 \qquad (h>0)$$

gleichmäßig in k (>0) in fast allen Punkten x zeigen. Auf Grund dieser ist der Beweis von (1) leicht zu vollbringen.

Sei η eine beliebige positive Zahl, und wählen wir ω so groß, daß die Menge $E=\underset{t}{E}[|f(t)|\leqq\omega;\ 0\leqq t\leqq 1]$ der Bedingung

$$\operatorname{mes} E \geqq 1-\eta$$

genügt. Sei

$$f^*(t)=\begin{cases} f(t) & \text{falls } |f(t)|>\omega,\\ 0 & \text{falls } |f(t)|\leqq\omega,\end{cases}$$

und sei $f^{**}(t)=f(t)-f^*(t)$.

Da auf der Menge E $f^*(t)=0$ ist, gibt es nach Lemma I eine perfekte Menge $F\subseteqq E$ und eine positive Zahl M, so daß

$$(3)\qquad \operatorname{mes} F\geqq \operatorname{mes} E-\eta\geqq 1-2\eta,$$

$$(4)\qquad \int_{-k}^{k}|f^*(x+v)|\,dv\leqq Mk \quad \text{für } x\in F$$

und

$$(5)\qquad \int_{I_\nu}|f^*(v)|\,dv\leqq M\operatorname{mes} I_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

gelten, wo die $I_\nu=(a_\nu, b_\nu)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ die Komplementär-Intervalle von F in $(0,1)$ bezeichnen.

Sei $x_0\in F$ ein Punkt, für den die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(6)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{mes}(F\cap[x_0-h,\ x_0+h])}{2h}=1 \qquad (h>0),$$

$$(7)\qquad \int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du=o(h) \qquad (0<h\to 0),$$

$$(8)\qquad \int_0^1\frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt<\infty.$$

Ferner sei ε eine beliebige positive Zahl, und $h_0(>0)$ sei so klein, daß für $0<h\leqq h_0(\leqq 1)$ die Ungleichung

$$(9)\qquad \int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du<\varepsilon h$$

besteht.

Da $f(t)=f^*(t)+f^{**}(t)$ und $f^*(x_0)=0$ ist, gilt die folgende Abschätzung:

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv \leqq$$
$$\leqq \int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv +$$
$$+\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,du \int_u^{u+k} |f^{**}(x_0+v)-f^{**}(x_0)|\,dv = \mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2.$$

Da $|f^{**}(t)|\leqq\omega$ ist, folgt auf Grund von (9)

$$\mathfrak{J}_2 \leqq 2\,\omega\varepsilon h k \tag{10}$$

für $0<h\leqq h_0$.

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv = \int_0^k |f^*(x_0+u+v)|\,dv \leqq \begin{cases} Mk & \text{falls } x_0+u\in F, \\ M(\operatorname{mes} I_\nu + k) & \text{falls } x_0+u\in I_\nu, \end{cases}$$

also

$$\int_u^{u+k} |f^*(x_0+v)|\,dv \leqq M\{\Phi(x_0+u)+k\},$$

wo $\Phi(t)$ die in Lemma II definierte Funktion ist. Aus dieser Ungleichung und aus (9) erhalten wir, für $0<h\leqq h_0$,

$$\mathfrak{J}_1 < M\varepsilon hk + M\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du. \tag{11}$$

Offenbar haben wir

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du = \int_0^h u^2|f(x_0+u)-f(x_0)|\,\frac{\Phi(x_0+u)}{u^2}\,du \leqq$$
$$\leqq {\sum_\nu}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu}(u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du,$$

wo sich die Summation auf die ν bezieht, für die $I_\nu\subseteqq[x_0, x_0+h]$ ist. Aus (6) folgt die Existenz einer positiven Zahl $N=N(x_0)$, für die $(b_\nu-x_0)/(a_\nu-x_0)\leqq N$ $(\nu=1,2,\dots)$ ist, und so gilt die folgende Abschätzung:

$${\sum_\nu}' \frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(a_\nu-x_0)^2}\int_{I_\nu}(u-x_0)^2|f(u)-f(x_0)|\,du \leqq N^2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2}\int_0^h|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Da nach Definition der Funktion $\Phi(t)$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\operatorname{mes} I_\nu}{(b_\nu-x_0)^2}\leqq\int_0^1\frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt$$

ist, ergibt sich auf Grund der obigen

$$\int_0^h |f(x_0+u)-f(x_0)|\,\Phi(x_0+u)\,du \leqq N^2h^2\int_0^1 \frac{\Phi(x_0+t)}{t^2}\,dt\int_0^h |fx_0+u)-f(x_0)|\,du.$$

Daraus folgt auf Grund von (8), (9), und (11) für $0 < h \leqq h_0$

$$\mathfrak{J}_1 < A\varepsilon(h^3+hk),$$

wo A eine von ε, h und k unabhängige Zahl ist. Daraus und aus (10) bekommen wir endlich, daß im Punkte x_0 (2) erfüllt ist. Nach dem Lebesgueschen Satze und der Lemma II sind (6), (7) und (8) in F fast überall erfüllt, und so besteht auch (2) in F fast überall. Da η beliebig gewählt war, gilt wegen (3) auch (2) fast überall.

Damit haben wir Satz I bewiesen.

Man sieht den folgenden Satz leicht ein:

Satz II. *Sei $f(t) \in L[0,1]$ eine nach 1 periodische Funktion. Ist* (1) *im Punkte x_0 erfüllt, so ist der Punkt x_0 ein Lebesguescher Punkt der Funktion $f(t)$, d. h.*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du = 0 \qquad (h>0).$$

Beweis. Ist fast überall $f(t)=f(x_0)$, so ist die Behauptung evident. Im entgegengesetzten Falle ist

$$a=\int_0^1 |f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv > 0$$

und so ergibt sich aus (1) für $k=\frac{1}{2}$

$$\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du = \frac{1}{a}\int_{-h}^{h}|f(x_0+u)-f(x_0)|\,du\int_{u-\frac{1}{2}}^{u+\frac{1}{2}}|f(x_0+v)-f(x_0)|\,dv,$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 3. H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe von integrierbaren Funktionen.

Satz III. *Sei $f(x)$ eine nach 2π periodische Funktion, $f(x)\in L[0,2\pi]$. Wenn die Relation* (1) *im Punkte x_0 erfüllt ist, dann ist $\mathfrak{S}(f)$ im Punkte x_0 H_2-summierbar.*

Beweis. Zum Beweis benützen wir den Grundgedanken eines Auf-satzes von G. GRÜNWALD[6]). Wir können offenbar annehmen, daß $x_0=0$ und $f(0)=0$ ist. Sei ε eine beliebige positive Zahl und δ $(0<\delta<\pi)$ so klein, daß im Falle $0<h\leqq 2\delta$ die Bedingungen

$$\int_{-h}^{h}|f(u)|du\int_{u-k}^{u+k}|f(v)|dv<\varepsilon(h^3+hk)\qquad(k>0)\tag{12}$$

und

$$\int_{-h}^{h}|f(u)|du<\varepsilon h\tag{13}$$

erfüllt sind.

Sei $f_1(t)=f(t)$ falls $|t|\leqq\delta$, und $f_1(t)=0$ falls $\delta<|t|\leqq\pi$, ferner sei $f_2(t)=f(t)-f_1(t)$. Nach dem Riemannschen Lemma ist

$$\lim_{\nu\to\infty}s_\nu(f_2;0)=0.\tag{14}$$

Da $s_\nu^2(f;0)\leqq 2(s_\nu^2(f_1;0)+s_\nu^2(f_2;0))$, und da nach (14)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^2(f_2;0)=0$$

ist, reicht es hin nur die H_2-Summierbarkeit der Fourierreihe $\mathfrak{S}(f_1)$ in $x=0$ zu beweisen. Da

$$s_\nu^2(f_1;0)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)\,\frac{\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)u\,\sin\left(\nu+\frac{1}{2}\right)v}{2\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}}\,du\,dv$$

ist, so haben wir

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}s_\nu^2(f_1;0)=\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)k_n(u,v)\,du\,dv\tag{15}$$

mit

$$k_n(u,v)=\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{n+1}\frac{1}{\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}}\left[\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u-v)}{\sin\frac{u-v}{2}}-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(u+v)}{\sin\frac{u+v}{2}}\right].$$

Wir betrachten die Zerlegung

$$\int_{-\delta}^{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(u)f(v)\,k_n(u,v)\,du\,dv=\left(\int_0^\delta\int_0^\delta+\int_0^\delta\int_{-\delta}^0+\int_{-\delta}^0\int_0^\delta+\int_{-\delta}^0\int_{-\delta}^0\right)f(u)f(v)k_n(u,v)\,du\,dv.$$

Um den Satz zu beweisen, ist es genügend zu zeigen, daß alle vier Glieder

[6]) G. GRÜNWALD, Über die Summabilität der Fourierschen Reihe, *diese Acta,* **10** (1941—43), 55—63.

der rechten Seite im absoluten Betrag kleiner als ε-mal eine von ε unabhängige Konstante sind, falls n genügend groß ist. Wir schätzen nur das Integral

$$\mathfrak{J}=\int_0^\delta\int_0^\delta f(u)f(v)\,k_n(u,v)\,du\,dv=2\int_0^\delta\int_0^u f(u)f(v)\,k_n(u,v)\,du\,dv$$

ausführlich ab. Die anderen Integrale können ähnlich abgeschätzt werden.

Sei n so groß, daß die Ungleichung $2\pi/n\leqq\delta$ besteht, und betrachten wir die folgenden Gebiete:

$$\sigma_1=\underset{(u,v)}{E}[0\leqq u\leqq 2\pi/n;\ 0\leqq v\leqq u],\qquad \sigma_2=\underset{(u,v)}{E}[2\pi/n\leqq u\leqq\delta;\ 0\leqq v\leqq\pi/n],$$

$$\sigma_3=\underset{(u,v)}{E}[2\pi/n\leqq u\leqq\delta;\ u-\pi/n\leqq v\leqq u],\quad \sigma_4=\underset{(u,v)}{E}[2\pi/n\leqq u\leqq\delta;\ \pi/n\leqq v\leqq u-\pi/n].$$

In folgendem bezeichnen $c_1, c_2, \ldots$ von n und von δ unabhängige Konstanten. Es gelten die folgenden Ungleichungen[7])

$$|k_n(u,v)|\leqq\begin{cases} c_1 n^2 & \text{für } (u,v)\in\sigma_1,\\ c_2\dfrac{1}{u^2} & \text{für } (u,v)\in\sigma_2,\\ c_3\dfrac{1}{uv} & \text{für } (u,v)\in\sigma_3,\\ \dfrac{1}{nuv(u-v)} & \text{für } (u,v)\in\sigma_4.\end{cases}$$

Auf Grund dieser Ungleichungen ist

$$\begin{aligned}|\mathfrak{J}|\leqq 2c_1n^2\iint\limits_{\sigma_1}|f(u)f(v)|\,du\,dv+2c_2\iint\limits_{\sigma_2}\frac{|f(u)f(v)|}{u^2}\,du\,dv+\\ +2c_3\iint\limits_{\sigma_3}\frac{|f(u)f(v)|}{uv}\,du\,dv+\frac{2}{n}\iint\limits_{\sigma_4}\frac{|f(u)f(v)|}{uv(u-v)}\,du\,dv=\mathfrak{J}_1+\mathfrak{J}_2+\mathfrak{J}_3+\mathfrak{J}_4.\end{aligned}\tag{16}$$

Aus (13) folgt

$$\mathfrak{J}_1\leqq 2c_1n^2\int_0^{2\pi/n}|f(u)|\,du\int_0^{2\pi/n}|f(v)|\,dv<c_4\varepsilon.\tag{17}$$

Auf Grund von (12) ergibt sich durch partielle Integration

$$\mathfrak{J}_2=2c_2\int_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}\,du\int_0^{\pi/n}|f(v)|\,dv<2c_2\varepsilon\,\frac{\pi}{n}\int_{2\pi/n}^{\delta}\frac{|f(u)|}{u^2}\,du<c_5\varepsilon.\tag{18}$$

---

[7]) Siehe z. B. l. c. [6]).

Da im Gebiet σ_3 $v \geqq u - \frac{\pi}{n} \geqq \frac{u}{2}$ besteht, ist

$$\mathfrak{J}_3 \leqq 4c_3 \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv.$$

Nach Einführung der Funktion

$$\psi(t) = \int_0^t |f(u)| du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv$$

erhält man aus (12) durch partielle Integration

$$\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{u-\pi/n}^{u} |f(v)| dv = \left[\frac{\psi(t)}{t^2}\right]_{2\pi/n}^{\delta} + 2\int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{\psi(t)}{t^3} dt <$$

$$< c_6 \varepsilon + 2\varepsilon \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{t^3 + t\pi/n}{t^3} dt < c_7 \varepsilon + 2\varepsilon\pi/n \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{dt}{t^2} < c_8 \varepsilon,$$

also ist

(19) $$\mathfrak{J}_3 < c_9 \varepsilon.$$

Ist $v \leqq \frac{u}{2}$, so ist $u - v \geqq \frac{u}{2}$, und es gilt für $\mathfrak{J}_4$ die Abschätzung

(20)
$$\mathfrak{J}_4 = \frac{2}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u} du \int_{\pi/n}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{v(u-v)} dv \leqq \frac{4}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du \int_{\pi/n}^{u/2} \frac{|f(v)|}{v} dv +$$
$$+ \frac{4}{n} \int_{2\pi/n}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} \int_{u/2}^{u-\pi/n} \frac{|f(v)|}{(u-v)} du = \mathfrak{J}_1^* + \mathfrak{J}_2^*.$$

Auf Grund von (13) ergibt sich durch partielle Integration

$$\int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du < c_{10} \varepsilon \frac{1}{v}.$$

Also folgt durch abermalige partielle Integration auf Grund von (13)

(21) $$\mathfrak{J}_1^* = \frac{4}{n} \int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v} dv \int_{2v}^{\delta} \frac{|f(u)|}{u^2} du < \frac{c_{11}}{n} \varepsilon \int_{\pi/n}^{\delta/2} \frac{|f(v)|}{v^2} < c_{12} \varepsilon.$$

Sei endlich p eine natürliche Zahl, für die $2^p\pi/n \leqq \delta < 2^{p+1}\pi/n$ ist. Dann gilt auf Grund von (12) die folgende Abschätzung:

$$\mathfrak{J}_2^* \leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\int\limits_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}\frac{|f(u)|}{u^2}du\left(\sum_{j=0}^{i-1}\int\limits_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}\frac{|f(v)|}{u-v}dv\right) \leqq$$

$$\leqq \frac{4}{n}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{n}{2^i\pi}\frac{n}{2^j\pi}\int\limits_{2^i\pi/n}^{2^{i+1}\pi/n}|f(u)|du\int\limits_{u-2^{j+1}\pi/n}^{u-2^j\pi/n}|f(v)|dv <$$

$$< \frac{c_{13}}{n}\varepsilon\sum_{i=1}^{p}2^i\sum_{j=0}^{i-1}\frac{1}{2^j}+c_{14}\varepsilon\sum_{i=1}^{p}\frac{i}{2^i} < c_{15}\varepsilon.$$

Aus dieser und aus (21) gewinnen wir nach (20) $\mathfrak{J}_4 < c_{16}\varepsilon$. So ergibt sich endlich auf Grund von (16), (17), (18) und (19) $|\mathfrak{J}| < c_{17}\varepsilon$, wenn n genügend groß ist.

Damit haben wir Satz III vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 10. Februar 1955.)